Künstliche Intelligenz

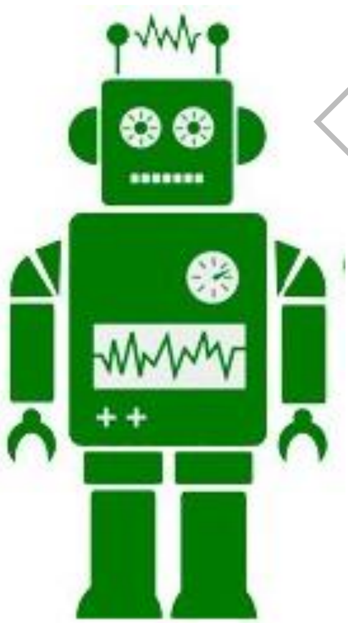
Logikbasiertes Problemlösen

Dr. Christian Meilicke
Research Group Data and Web Science
Universität Mannheim

Inhalt

- Was ist Logik
- Aussagenlogik
  - Syntax
  - Semantik
    - Logisches Schließen
- Modellierungsbeispiel
- Nutzung eines SAT-Solvers
- Nächstes Mal: Algorithmen im Solver

Logik und Agenten



Wahrnehmung

Hinzufügen

Abfragen

Wissensbasis

- Pilze mit grünem Hut sind giftig
- Lachende Plize sind wohlschmeckend, wenn sie keine Brille tragen
- Pilze neben Brillenpilzen sind giftig
- a lacht und hat einen roten Hut
- b lacht und hat einen roten Hut
- c guckt böse, hat einen grünen Hut und eine Brille
- ...
- e ist giftig
- a ist wohlschmeckend

Schlussfolgerungsmechanismus

Unabhängigkeit des Suchverfahrens vom Problem

Was ist Logik?

- Logik ist ein formaler Apparat, mit dem man automatisiert Schlußfolgerungen ziehen kann
- Menschen benutzen Schlussfolgerungen dieser Art ohne sich der formalen Grundlagen bewußt zu sein
  - Früher Diskussionen, ob Teilbereich der Psychologie => „Gesetze des Denkens“
  - Heute eigener Forschungsbereich (mit Nähe zur Mathematik), früher Teilbereich der Philosophie (Aristoloteles, Frege)

- Es gibt verschiedene Arten von Logiken
  - Aussagenlogik: $a \vee b \rightarrow c$
  - Beschreibungslogik: $F \sqsubseteq G \sqcap H$
  - Prädikatenlogik: $\forall x\ F(x) \rightarrow \exists y\ G(x, y)$
  - Modale Logiken: $\Diamond p$
  - …

Syntax und Semantik von Logiken

- Syntax einer Logik bestimmt den Aufbau von einfachen Ausdrücken zu komplexen Ausdrücken
  - Legt fest welche Ausdrücke wohlgeformt sind
  - In der Regel rekursiv definiert

- Semantik einer Logik bestimmt die Bedeutung der Ausdrücke
  - Interpretation & Modell
  - Erfüllbarkeit & Logische Folgerung
  - Ebenfalls rekursiv definiert

Syntax Aussagenlogik

Es seien a,b,c, ... atomare Aussagen (oder Atome)

α ist eine Formel, wenn α eine atomare Aussage ist

$\neg\alpha$ ist eine Formel, wenn α eine Formel ist

$(\alpha \vee \beta)$ ist eine Formel, wenn α und β Formeln sind

$(\alpha \wedge \beta)$ ist eine Formel, wenn α und β Formeln sind

$(\alpha \rightarrow \beta)$ ist eine Formel, wenn α und β Formeln sind

$(\alpha \leftrightarrow \beta)$ ist eine Formel, wenn α und β Formeln sind

Mehr gibt es nicht an syntaktischen Regeln mit Ausnahme der Klammerregeln auf der übernächsten Folie!

Bezeichnungen von Formeln

- Atomare Aussagen und negierte atomare Aussagen heißen Literale (positive und negative Literale).

- $\alpha \vee \beta$ heißt Disjunktion
- $\alpha \wedge \beta$ heißt Konjunktion
- $\alpha \rightarrow \beta$ heißt Subjunktion
  - α ist das Antezedenz, β ist das Sukzedenz
- $\alpha \leftrightarrow \beta$ heißt Bisubjunktion
- $\neg\alpha$ heißt Negation
- Disjunktion, Konjunktion, ... werden logische Junktoren genannt

Klammerregeln

- Die äußere Klammer kann immer weggelassen werden
  - d.h statt $\big((a \vee b) \rightarrow c\big)$ schreiben wir $(a \vee b) \rightarrow c$
- Präzedenz der Junktoren
  - Die Symbole ∧ und ∨ binden stärker als → und ↔, d.h. zum Beispiel $a \vee b \rightarrow c$ ist äquivalent zu $(a \vee b) \rightarrow c$
- Implizite Ausnutzung des Assoziativgesetzes
  - Die Klammerung $(a \wedge b) \wedge c$ vs. $\mathrm{a} \wedge (b \wedge c)$ macht keinen Unterschied und kann weggelassen werden
  - Gilt für ∨ gleichermaßen, nicht aber für die anderen Junktoren!
- Aller Sonderregelungen zu Klammern, die in anderswo eingeführt wurden, haben bei uns keine Geltung
  - Das bedeutet zum Beispiel $a \wedge b \vee c$ ist bei uns keine korrekte Formel

Normalformen

- DNF = Disjunktive Normalform
  - Eine DNF ist eine Disjunktionen von Konjunktionen von Literalen
    - Anmerkung: Ein einzelnes Literal wird hierbei auch als Konjunktion von Literalen verstanden
  - Beipiel $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge c \wedge d) \vee \neg b$

- KNF (CNF) = Konjunktive (Conjunctive) Normalform
  - Eine KNF ist eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen
    - Anmerkung: Ein einzelnes Literal wird hierbei auch als Disjunktion von Literalen verstanden
  - Beispiel $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c \vee d) \wedge \neg b$
  - Standardeingabe für viele Algorithmen
    - Problem (später): Wie kann man Formeln zur KNF konvertieren?

- Die Disjunktionen in einer KNF (bzw. allgemein Disjunktionen) werden auch Klauseln (clauses) genannt

Semantik Aussagenlogik

Definition: Sei M eine Menge von atomaren Aussagen. Eine Abbildung

$$\boldsymbol{I :\ M \Rightarrow \{0, 1\}}$$

heißt Interpretation.

Beispiel: $M = \{a, b, c\}$, dann ist $I(a) = 0$, $I(b) = 0$, $I(c) = 1$ eine Interpretation für M.

Eine Interpretation für eine Formel ist eine Interpretation für die Menge der atomaren Aussagen, aus denen die Formel zusammengesetzt ist.

Semantik Aussagenlogik

$$\mathcal{I}(\neg\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{I}(\alpha) = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}(\alpha \wedge \beta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{I}(\alpha) = \mathcal{I}(\beta) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{I}(\alpha) = 1 \text{ oder } \mathcal{I}(\beta) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}(\alpha \rightarrow \beta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{I}(\alpha) = 0 \text{ oder } \mathcal{I}(\beta) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}(\alpha \leftrightarrow \beta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{I}(\alpha) = \mathcal{I}(\beta) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für eine beliebige Formel α, ist I wie links dargestellt definiert.

Entnommen aus: http://www2.cs.uni-paderborn.de/cs/ag-klbue/de/courses/ss05/gwbs/logic-prop1-ss05-slides.ps.nup.pdf

Als Wahrheitstabellen

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

Abgekürzt für:
Wenn $I(\alpha) = 0$, dann $I(\neg\alpha) = 1$
Wenn $I(\alpha) = 1$, dann $I(\neg\alpha) = 0$

α	β	$\alpha \vee \beta$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Beispiel

Es sei die Interpretation für $\{a, b, c\}$ definiert durch

$$I(a) = 0$$
$$I(b) = 1$$
$$I(c) = 0$$

Dann gilt für die Formel $a \wedge b \rightarrow c$

Aus $I(a) = 0$, $I(b) = 1$ folgt $I(a \wedge b) = 0$

Aus $I(a \wedge b) = 0$ und $I(c) = 0$ folgt $I(a \wedge b \rightarrow c) = 1$

Hier sieht man auch, dass es wichtig ist die implizite Klammerung zu verstehen.

Interpretationen und Modell

- Jede Zeile in einer Wahrheitstabelle entspricht einer Interpretation

- **Definiton: Eine Interpretation $\boldsymbol{I}$ ist ein Modell für eine Formel $\boldsymbol{\alpha}$, genau dann wenn $\boldsymbol{I(\alpha) = 1}$.**

a	b	c	$(b \vee c) \rightarrow (a \wedge \neg c)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Äquivalenzumformungen

- **Definition: Zwei Formeln α und β sind äquivalent, wenn jedes Modell für α auch ein Modell für β ist und umgekehrt**

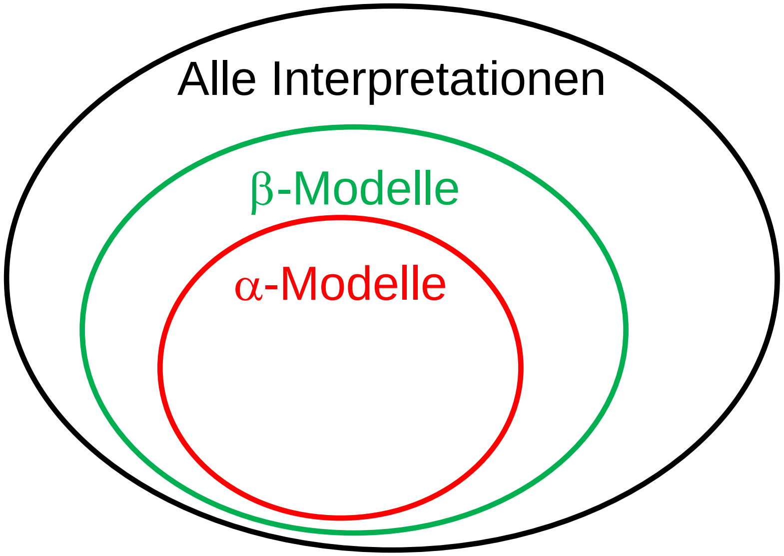
- Beispiele:
  - $a \vee \neg b \Leftrightarrow \neg a \rightarrow \neg b$
  - $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$

- Es gibt Regeln deren Anwendung den Übergang von einer Formel zu einer anderen äquivalenten Formel zur Folge haben (Äquivalenzumformungen, z.B. de Morgan)

Logische Folgerung

- **Definition: Eine Formel β folgt aus einer Formel α, genau dann wenn jedes Modell für α auch ein Modell für β ist**
- „Wenn α wahr ist, muss auch β wahr sein“
- Man schreibt dann $\alpha \models \beta$ („aus α folgt β “)

			α	β
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0



Erfüllbarkeit

- **Definition: Eine Formel ist erfüllbar, wenn es ein Modell für diese Formel gibt, d.h., wenn es eine Interpretation gibt, die die Formel auf 1 abbildet**

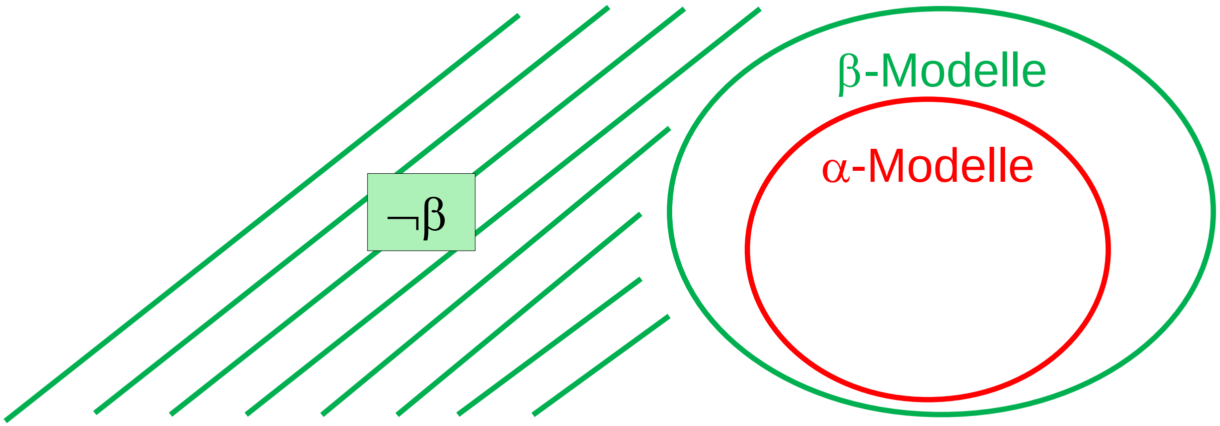
- **Definition: Eine Formel ist unerfüllbar, wenn es kein Modell für die Formel gibt**
  - **Man nennt so eine Formel dann auch Kontradiktion**

- **Definition: Eine Formel, für die jede beliebige Interpretation ein Modell ist, nennt man Tautologie**

Beweis durch Widerspruch

- Folgerung $\alpha \models \beta$ kann man direkt zeigen:
  - Zeige, dass alle Modelle für α auch Modelle für β sind
  - Direkter Beweis

- Indirekter Beweis (Beweis durch Widerspruch)
  - Zeige, dass α und $\neg\beta$ unerfüllbar ist
  - Hierzu muss man zeigen, dass es keine Interpretation gibt, die zugleich ein Modell für α und für $\neg\beta$ ist



Wissensbasis

- Im folgenden reden wir von einer Wissensbasis KB
  - KB = Knowledge Base, KB ist eine Menge von Formeln
  - Menge = Konjunktion, d.h. KB ist eine „große“ Konjunktion von Formeln

- Oft werden wir Anfragen dieser Form stellen
  - **A)** KB $\models \alpha$
    - Mögliche Antwort: JA/NEIN, was bedeutet das?
  - **B)** KB $\models \neg\alpha$
    - Mögliche Antwort: JA/NEIN, was bedeutet das?

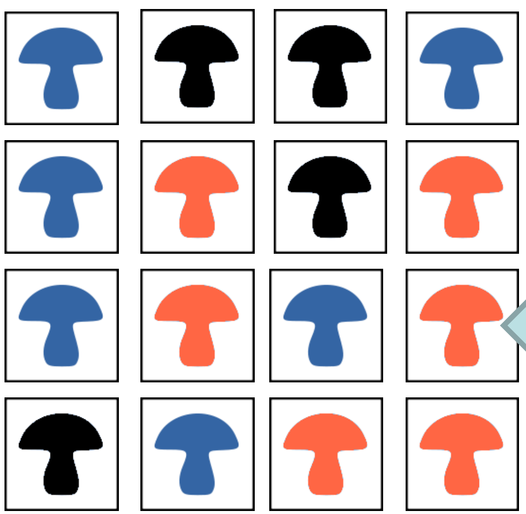
- **Frage 1: Wie lautet die Antwort, wenn KB unerfüllbar?**
- **Wie lautet die Antwort, wenn KB erfüllbar und α unerfüllbar?**

Antwort A: Ja
Antwort B: Nein,
Antwort C: Nicht eindeutig zu beantworten, das eine oder andere

Beispiel

- Schwarze Pilze, die Nachbarn von giftigen Pilzen sind, sind giftig.
- Blaue Pilze, die Nachbarn von ungiftigen Pilzen sind, sind ungiftig.
- In jeder Reihe und in jeder Spalte ist mindestens ein giftiger Pilz.
- In jeder Reihe und in jeder Spalte ist mindestens ein ungiftiger Pilz.
- Rote Pilze sind giftig.

Problem: Dies sind Allaussagen bei denen über Variablen quantifiziert wird.



Ein Feld im Inneren
hat 4 Nachbarfelder

Feld 3,4 (Zeile 3, Spalte 4)

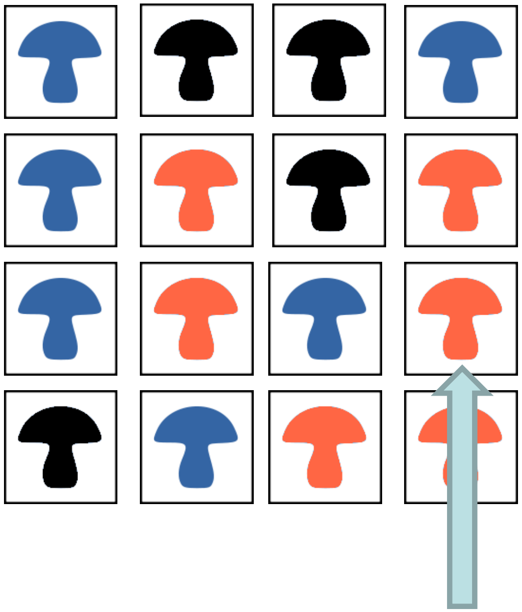
Welche Pilze sind nicht giftig?

Formalisierung: Bausteine

- Wir verwenden die folgenden atomaren Aussage
  - r$ot_{x,y}, blau_{x,y}, schwarz_{x,y}$ - Gibt an welche Farbe der Pilz auf dem Feld x, y hat
  - $giftig_{x,y}$ - Gibt an, ob der Pilz auf dem Feld x, y giftig ist

- Für alle Aussagen die Nachbarschaft betreffend bzw. für Aussagen bezüglich derselben Reihe oder Spalte verwenden wir die Indizes

Formalisierung: Beobachtungen



Feld 3,4 (Zeile 3, Spalte 4)

Sehr einfach:

$$KB = \{$$
$$blau_{1,1}, schwarz_{1,2}, schwarz_{1,3}, blau_{1,4}, blau_{2,1}, rot_{2,2}, \ldots$$
$$\}$$

Formalisierung: Allgemeine Formeln

- Allgemeine Regeln (beispielhaft):
  I. Schwarze Pilze, die Nachbarn von giftigen Pilzen sind, sind giftig.
  II. In jeder Reihe ... ist mindestens ein giftiger Pilz.

- Füge für alle 16 Positionen $x, y = 1{,}1 \ldots 4{,}4$ die folgende Formeln der Wissenbasis KB hinzu
  – $schwarz_{x,y} \wedge \left(giftig_{x+1,y} \vee giftig_{x-1,y} \vee giftig_{x,y+1} \vee giftig_{x,y-1}\right) \rightarrow giftig_{x,y}$
  – Hierbei muss bei Eck und Randfeldern beachtet werden, dass die Klausel in der Mitte der Formel nur aus zwei bzw. drei Literalen bestehen darf

- Füge für alle vier Reihen r=1... 4 die folgenden Formeln der KB hinzu
  – $giftig_{r,1} \vee giftig_{r,2} \vee giftig_{r,3} \vee giftig_{r,4}$

Umfrage: Wieviele Modelle hat
a xor b xor c
?

A: 1

B: 3

C: 4

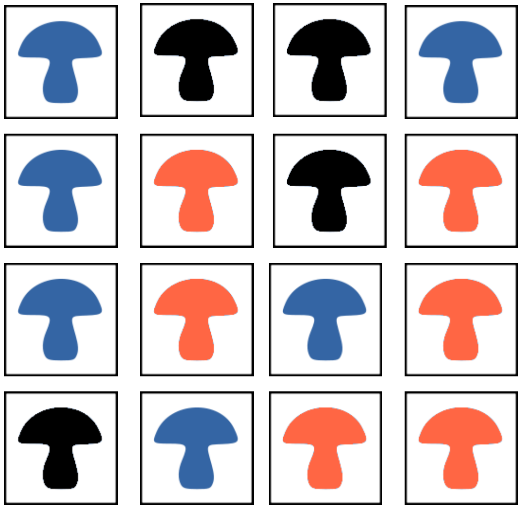
D: 6

Erklärung zur Antwort

a	b	c	a xor b	(a xor b) xor c
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

Inferenz

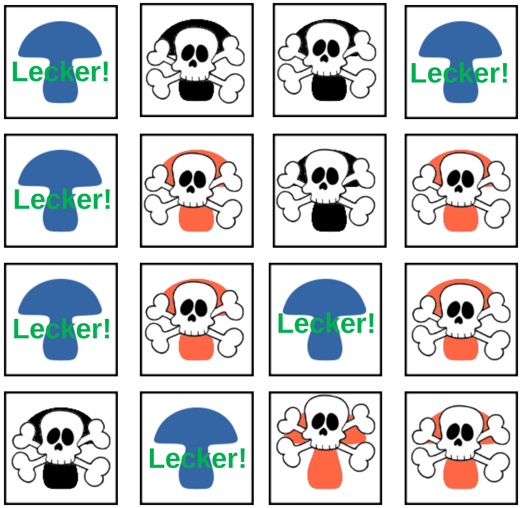
- Anfrage an den SAT Solver: Ist $KB \cup \neg giftig_{4,1}$ erfüllbar?



Inferenz

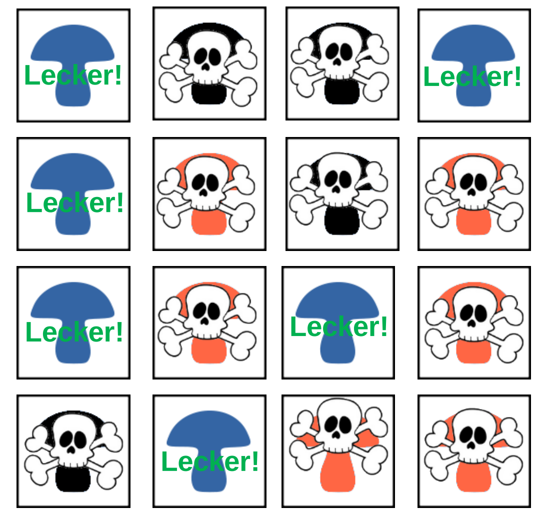
- Anfrage an den SAT Solver: Ist $KB\ \cup \neg giftig_{4,1}$ erfüllbar?
  - Antwort: Nein!
  - Also gilt $\neg\neg giftig_{4,1}$ d.h. es gilt $giftig_{4,1}$

- Achtung: Es ist hier zufällig so, dass wir von allen Pilzen schließen können, ob giftig oder nicht

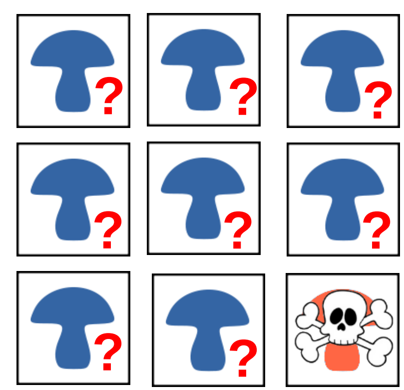


Inferenz

- Anfrage an den SAT Solver: Ist $KB \cup \neg giftig_{4,1}$ erfüllbar?
  - Antwort: Nein!
  - Also gilt $\neg\neg giftig_{4,1}$ d.h. es gilt $giftig_{4,1}$
- Achtung: Es ist hier zufällig so, dass wir von allen Pilzen schließen können, ob giftig oder nicht



- Im 3x3 Feld ist dies nicht so!
- Ist $KB \cup \neg giftig_{1,1}$ erfüllbar?
  - Antwort: Ja! Also könnte der Pilz an 1,1 giftig sein
- Ist $KB \cup giftig_{1,1}$ erfüllbar?
  - Antwort: Ja! Also könnte der Pilz an 1,1 ungiftig sein



Beispiel in Prädikatenlogik

- In Prädikatenlogik für jede allgemeine Aussage nur eine Formel
  - Statt der Auflistung (= Konjunktion) vieler Formeln desselben Typs wird der Allquantor verwendet
  - Disjunktionen (in denen z.B. die Felder einer Reihe vorkommen) können mittels Existenzquantor modelliert werden

- Verwendung von Variablen => Pilzfeld kann unendlich sein

- Modellierung in Aussagenlogik ist deutlich umfänglicher
- Die Formeln sollten mit einem Programm generiert werden
  - Das ist keine Ausnahme, sondern eher die Regel!

SAT Solver

- Ein SAT-Solver ist eine Inferenzmaschine, mit der man Überprüfen kann, ob eine Formel erfüllbar ist.
  - Z.B. SAT4J (Java)
- Will man also wissen, ob KB $\models$ giftig(p1) gilt, dann verwendet man das Prinzip des indirekten Beweises
  - Es kann auch sein, dass der Solver ein Interface hat, bei dem man direkt nach logischer Folgerung fragen kann
- Man läßt den SAT Solver überprüfen, ob KB $\wedge$ $\neg$giftig(p1) erfüllbar ist
  - Wenn nein, dann gilt die Folgerung
  - Wenn ja, dann gilt die Folgerung nicht

KNF in DIMACS Format

- Aber: Die meisten SAT Solver verlangen als Eingabe eine (C)KNF in DIMACS
  - Aussagenlogische Atome sind natürliche Zahlen > 0
  - Literale sind ganze Zahlen (positiv oder negativ)
  - Eine Klausel (also eine Disjunktion) entspricht einer Zeile
  - Die Zeilen werden verundet, so ergibt sich die Konjunktion

```
c Beispielformel
p cnf 4 5
-1 2 3 0
2 -3 0
-4 0
1 4 0
-2 -3 -4 0
```

Share Browser

run on http://www.msoos.org/2013/09/minisat-in-your-browser/

SAT Solver: Java

- Die Library SAT4J bietet einen Sat-Solver den man über Java nutzen kann

```
final int MAXVAR = 1000000;
final int NBCLAUSES = 500000;
ISolver solver = SolverFactory.newDefault();
solver.newVar(MAXVAR);
solver.setExpectedNumberOfClauses(NBCLAUSES);
for (int i=0;< NBCLAUSES;i++) {
   int [] clause = // get the clause from somewhere
   solver.addClause(new VecInt(clause));
}
IProblem problem = solver;
if (problem.isSatisfiable ()) {
   ....
} else {
   ...
}
```

- Achtung: Ist ein Problem trivialerweise unerfüllbar, dann wird eine entsprechende Exception geworfen, die man abfangen muss
  – Dies ist dann kein Programmierfehler!

DNF und KNF

a	b	c	α
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

DNF und KNF kann leicht aus der Wahrheitstabelle abgelesen werden

Sollte bekannt sein, wenn nicht https://www.youtube.com/watch?v=tpdDlsg4Cws

Problem beim Konvertieren

- Erstellen der Wahrheitstabelle entspricht dem Lösen des Problems
  - Aber: Dieser Ansatz ist extrem uneffizient und nicht anwendbar für Formeln mit vielen atomaren Aussagen

- Was kann man machen ?
  - Äquivalenzumformungen
  - Problem direkt in KNF formulieren
  - Nur Teilformeln übersetzen

Äquivalenzumformungen

- Elimination $\leftrightarrow$:
  - $\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha)$

- Elimination $\rightarrow$:
  - $\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \neg\alpha \lor \beta$

- De Morgansche Regeln:
  - $\alpha \land \beta \Leftrightarrow \neg(\neg\alpha \lor \neg\beta)$
  - $\alpha \lor \beta \Leftrightarrow \neg(\neg\alpha \land \neg\beta)$

- Doppelte Negation:
  - $\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha$

Nochmal zusammengefasst!

- Kodiere das Problem auf konzeptioneller Ebene mittels Aussagenlogik

- Formuliere das Entscheidungsproblem als Inferenzproblem
  - Überprüfe Inferenz mittels indirektem Beweis
  - Konvertiere Problem in DIMACS KNF und verwende einen SAT Solver

- Entscheidungsproblem gelöst
- Führe entsprechende Aktion aus
- Füge neu gewonnene Erkenntnisse als Formeln hinzu

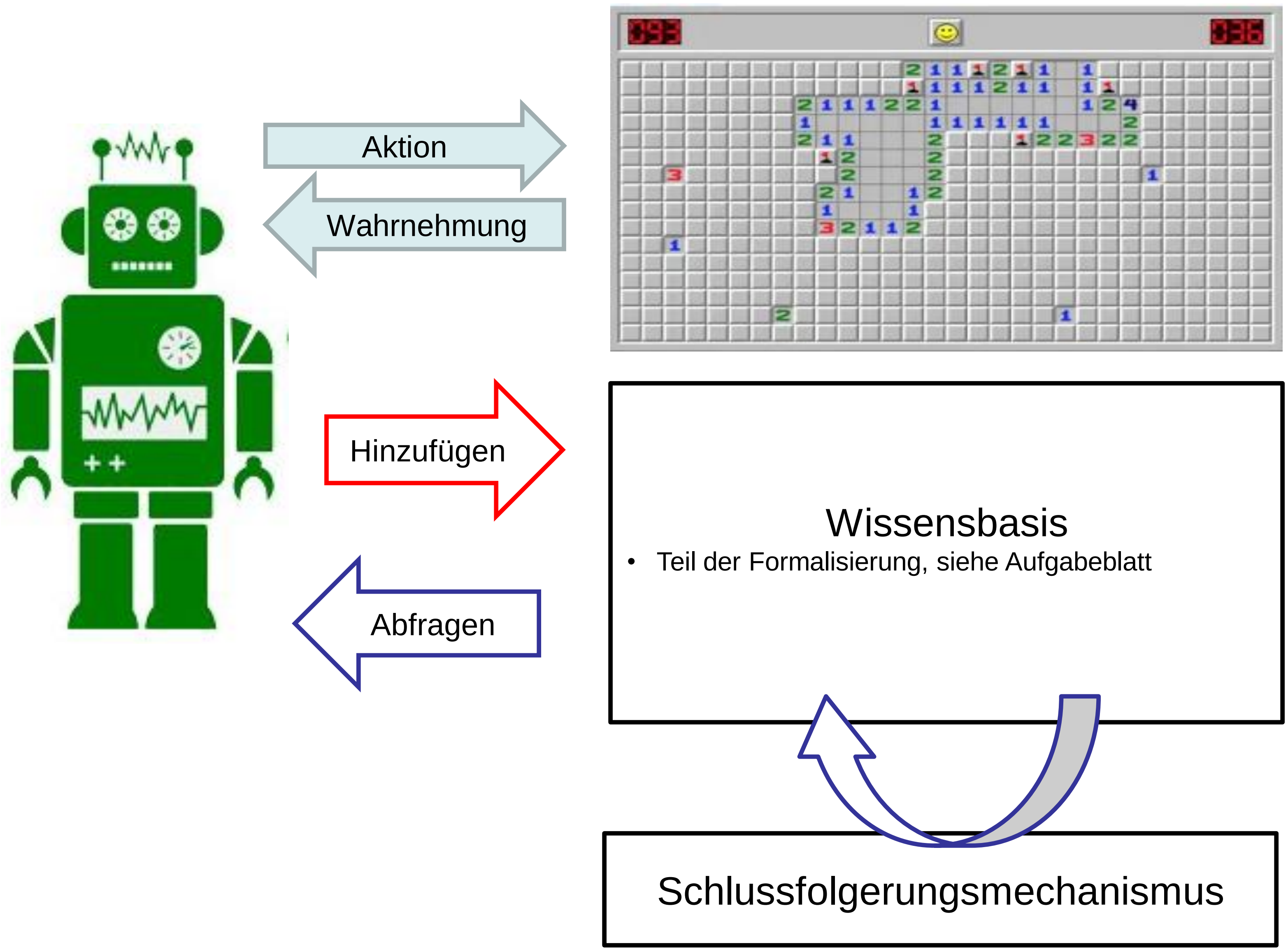
Ausdruckstärke

- Verschiedene Logiken unterscheiden sich hinsichtlich der Ausdruckstärke und dem Anwendungsbereich

- Prädikatenlogik
  - Komplexe Sachverhalte können leicht modelliert werden
  - Schlußfolgerungsmechanismen in Prädikatenlogik komplex und nicht leicht zu implementieren
  - Universum nicht eingeschränkt (Regeln gelten auch für unendlich viele Pilze)

- Aussagenlogik
  - Modellierung oft weniger elegant
  - Schlußfolgerungsmechanismen einfach und können (auch von euch) grundlegend implementiert werden

Sequentiell vs. Episodisch



Zusammenfassung

- Wichtig ist das allgemeine Verständnis:
  - Was sind Modelle und Interpretationen?
  - Was bedeutet es, dass etwas logisch folgt?

- Verwendung von Logik erlaubt das Abstrahieren von dem Algorithmus der das Problem löst
  - Modellierung = Übersetzung in Logik Formeln
  - Lösen des Problems = Anwendung eines Schlußfolgerungsalgorithmus

- Einmal implementiert kann der Algorithmus auf jede Menge von Logik Formeln angewendet werden

- Aufwand muß in die Modellierung gesteckt werden!