Künstliche Intelligenz

Logisches Schließen

Dr. Christian Meilicke
Research Group Data and Web Science
Universität Mannheim

Teile der Vorlesung basieren auf einem
Foliensatz von Prof. Dr. Heiner Stuckenschmidt

Überblick

- Wie man ein Problem mit Logik beschreibt

?

- Wie man, gegeben eine Menge logischer Formeln, Inferenz betreiben kann
  - Formelebene vs. Modellebene
  - Beweisen mit Ableitungsregeln
  - Resolution
  - Wahrheitstabelle
  - Tableauverfahren
  - DPLL (Backtracking + X)
  - GSat (Lokale Suche)
  - WalkSat (Lokale Suche mit Zufallselement)

Begrifflichkeiten

- Achtung: Verschiedene Begriffe
  - Reasoner
  - Sat-Solver
  - Schlussfolgerungsmechanismus
  - Logisches Schlussverfahren
  - …

- Die alle für dasselbe stehen, wenn wir uns auf Ausagenlogik beschränken

Logisches Schliessen

- $KB \models \alpha$
  - α folgt logisch aus KB
- $KB \vdash_i \alpha$
  - α kann aus KB mit der Methode i abgeleitet werden

- Korrektheit der Methode i:
  - *Wenn* $KB \vdash_i \alpha$ dann $KB \models \alpha$
- Vollständigkeit der methode i:
  - Wenn $KB \models \alpha$ dann $KB \vdash_i \alpha$

- Vollständig und korrekt
  - $\vdash_i$ und $\models$ fallen zusammen (d.h. „genau dann wenn“)

Arten von Inferenzverfahren

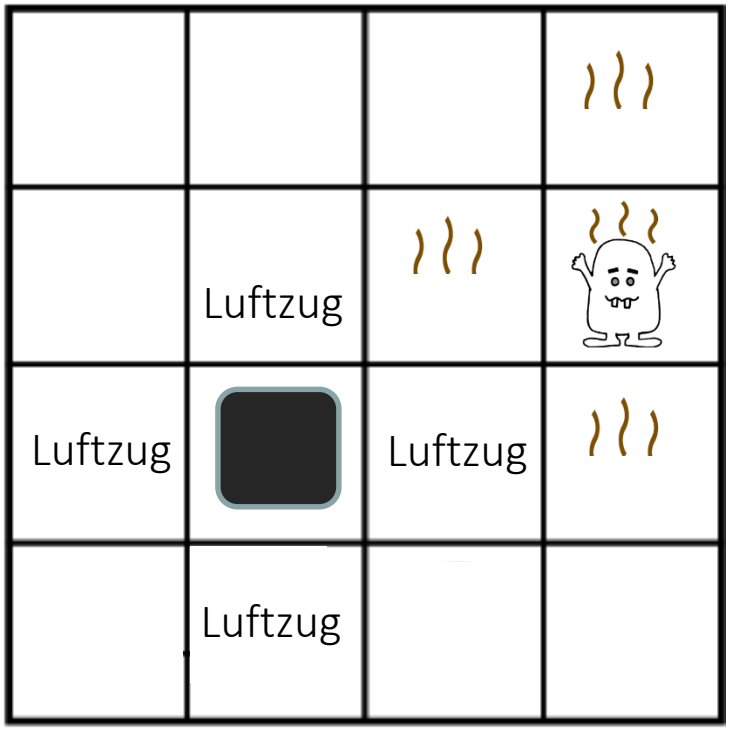
- Formelebene (nur syntaktische Umformungen)
  - Menge von Schlußregeln
  - Resolution

- Modellebene (explizite Behandlung der Semantik)
  - Wahrheitstabelle = Auflisten aller Interpretationen
  - Tableauverfahren = Zielgerichtete Modellkonstruktion
  - DPLL = Backtracking mit speziellen Regeln
  - GSAT = Lokale Suche
  - WalkSat = Randomisierte Lokale Suche

Schließen auf Formelebene

- Ableitungsregeln auf Grundlage der Formelstruktur:
  - Wenn $\alpha \rightarrow \beta$ und α dann β (modus ponens)
  - Wenn $\alpha \wedge \beta$ dann α ($\wedge$ -elimination)
  - Wenn $\alpha \leftrightarrow \beta$ dann $\alpha \rightarrow \beta$ und $\beta \rightarrow \alpha$ ($\leftrightarrow$ elimination)
  - Wenn $\neg\alpha \wedge \neg\beta$ dann $\neg(\alpha \vee \beta)$ (de Morgan)
  - ...
- Ein Beweis ist eine Folge von Ableitungen
- Die einzelnen Ableitungsregeln werden auf der Modellebene begründet

Wumpus-Welt



Konkretes Beispiel

- Aussagen:
  - $P_{i,j}$: Falle (Pit) in Feld [i,j]
  - $B_{i,j}$: Luftzug (Breeze) in Feld [i,j]
- Spielregeln:
  - $R_1 : \neg P_{1,1}$
  - $R_2 : B_{1,1} \leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$
  - $R_3 : B_{1,2} \leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$
  - ...
- Beobachtungen:
  - $R_4 : \neg B_{1,1}$
  - $R_5 : B_{2,1}$
  - ...
- Frage:
  - $KB \models \neg P_{1,2}$

Beispielbeweis

Gegeben oder durch vorherige Schritte abgeleitet:

- R1: $((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \leftrightarrow B_{1,1})$
- R2: $\neg B_{1,1}$

Beweis, dass $\neg P_{1,2}$ gilt:

$\leftrightarrow$ Elimination auf R1
- R3: $(B_{1,1} \rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \rightarrow B_{1,1})$

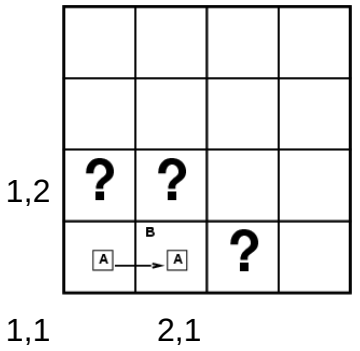
$\wedge$ Elimination auf R3
- R4: $(P_{1,2} \vee P_{2,1}) \rightarrow B_{1,1}$

Contraposition von R4
- R5: $\neg B_{1,1} \rightarrow \neg(P_{1,2} \vee P_{2,1})$

Modus Ponens auf R5 und R2
- R6: $\neg(P_{1,2} \vee P_{2,1})$

De Morgansches Gesetz auf R6
- R7: $\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$

$\wedge$ Elimination auf R7
- R8: $\neg P_{1,2}$



Welche Regel wende ich wann an?

Sind die Regeln vollständig?

Wann höre ich auf (wenn ich das zu beweisende noch nicht gefunden habe)?

Normalformen

- Effizientes Schließen auf Formelebene benötigt einheitliche Strukturen auf denen Regeln arbeiten können

- Zur Erinnerung: Konjuktive Normalform (KNF):
  - Formeln sind Konjunktion von Disjunktionen
    - $(l_{1,1} \vee ... \vee l_{1,k}) \wedge ... \wedge (l_{n,1} \vee ... \vee l_{n,k})$
  - Disjunktionen enthalten Aussagen oder deren Negationen (Literale)
  - Die Disjunktionen nennt man auch Klauseln
  - Jede Formel kann in konjunktive Normalform umgeformt werden

Konvertierung in KNF I

Ablesen aus der Wahrheitstabelle:

a	b	α	
0	0	**0**	ergibt eine klausel
0	1	**1**	
1	0	**0**	ergibt eine klausel
1	1	**1**	

$$(a \vee b) \wedge (\neg a \vee b)$$

Achtung: Geht natürlich nicht für die ganze KB,
wohl aber für ihre Bestandteile

Konvertierung in KNF II

- Anstatt die gesamte Wahrheitstabelle zu erstellen, verwendet man Äquivalenzumformungen für die einzelnen Formeln in der KN, z.B.

(1) $\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$ (de Morgan)

(2) $\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$ (de Morgan)

(3) $\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta$

(4) $\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

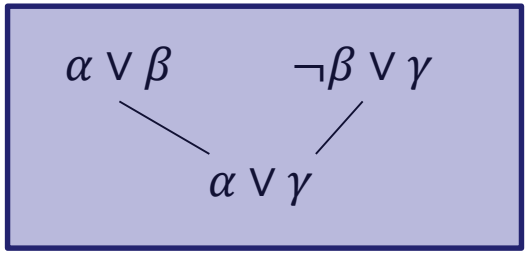
(5) $\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha$

Resolution

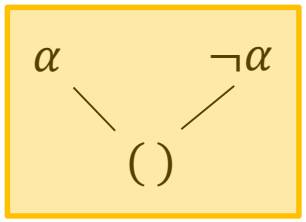
- Umformung in konjunktive Normalform (KNF)
- Sich widersprechende Literale in den Klauseln werden eliminiert
  - Terminiert immer (irgendwann) für Aussagenlogik
  - Prädikatenlogik: Terminiert i.A. nur im Fall unerfüllbarer Formeln (Semi-Entscheidbarkeit)
- Wird die leere Klausel abgeleitet, dann ist die KNF nicht erfüllbar
- Ist die KNF nicht erfüllbar, dann wird (irgendwann) die leere Klausel abgeleitet

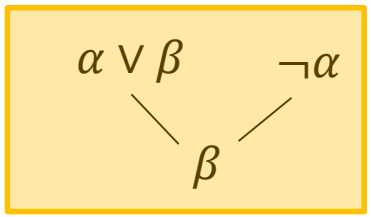
Schlussregel

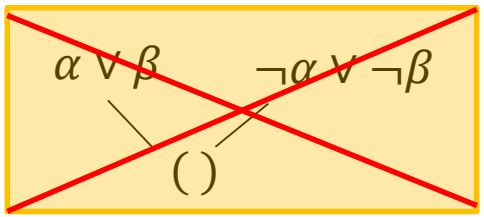
- $(\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \gamma) \vDash \alpha \vee \gamma$
  - Eventuell einfacher nachzuvollziehen:
  - ❖ $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \vDash \neg\alpha \rightarrow \gamma$



- Im allgemeinen:
  - Bilde die Vereinigung der Literale beider Formeln und streiche ein (!) Literal, das in der einen Formel positiv und in der anderen negativ vorkommt
  - Wende das Verfahren wiederholt an (auch über Ebenen hinweg)
  - Ergibt das Verfahren die leere Klausel, so ist die KNF nicht erfüllbar
- Sonderfälle:



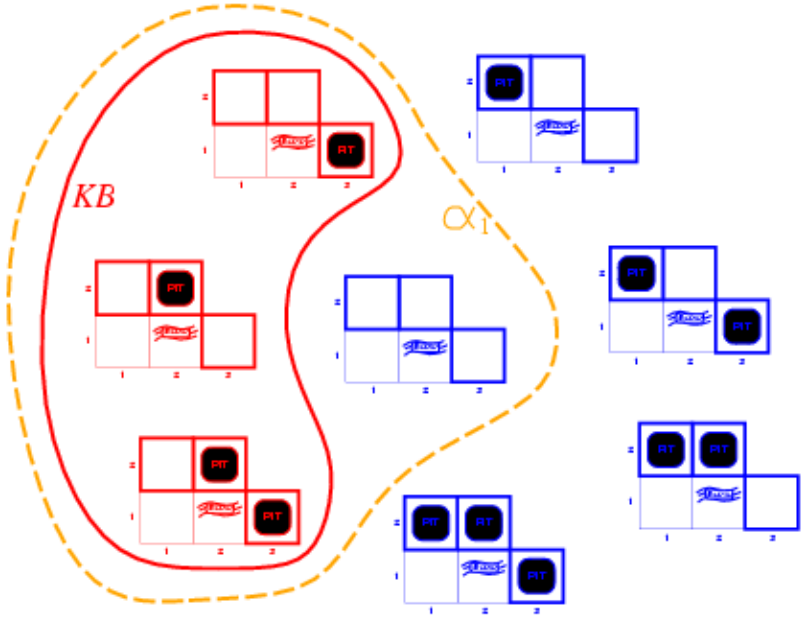




Beweisen vs. Resolution

- Formel in beliebiger Form
  - Vollständiges Beweisverfahren nur mit vielen verschiedenen Schlußregeln möglich
- Ist eine Formel in einer bestimmten Form (KNF), dann reicht eine kleine Menge von Schlußregeln
  - Zum Beispiel Resolution: Eine Schlußregel!
  - Vorteil: Schnelles Überprüfen der Anwendbarbeit durch Indexstrukturen auf einheitlichen Formen

Beweis durch Widerspruch



KB $\models \alpha_1$ genau dann wenn KB $\wedge \neg \alpha_1$ unerfüllbar

Resolutionsbeweis

- Beweis als Suche
  - Zustand = Menge von Klauseln (Wissensbasis)
  - Suchschritt = Anwenden der Resolutionsregel auf zwei beliebige passende Disjunktionen
  - Zieltest = leere Klausel abgeleitet

- Gegeben:

$$(a \vee \neg b) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg c \vee \neg d) \wedge (\neg c \vee d)$$

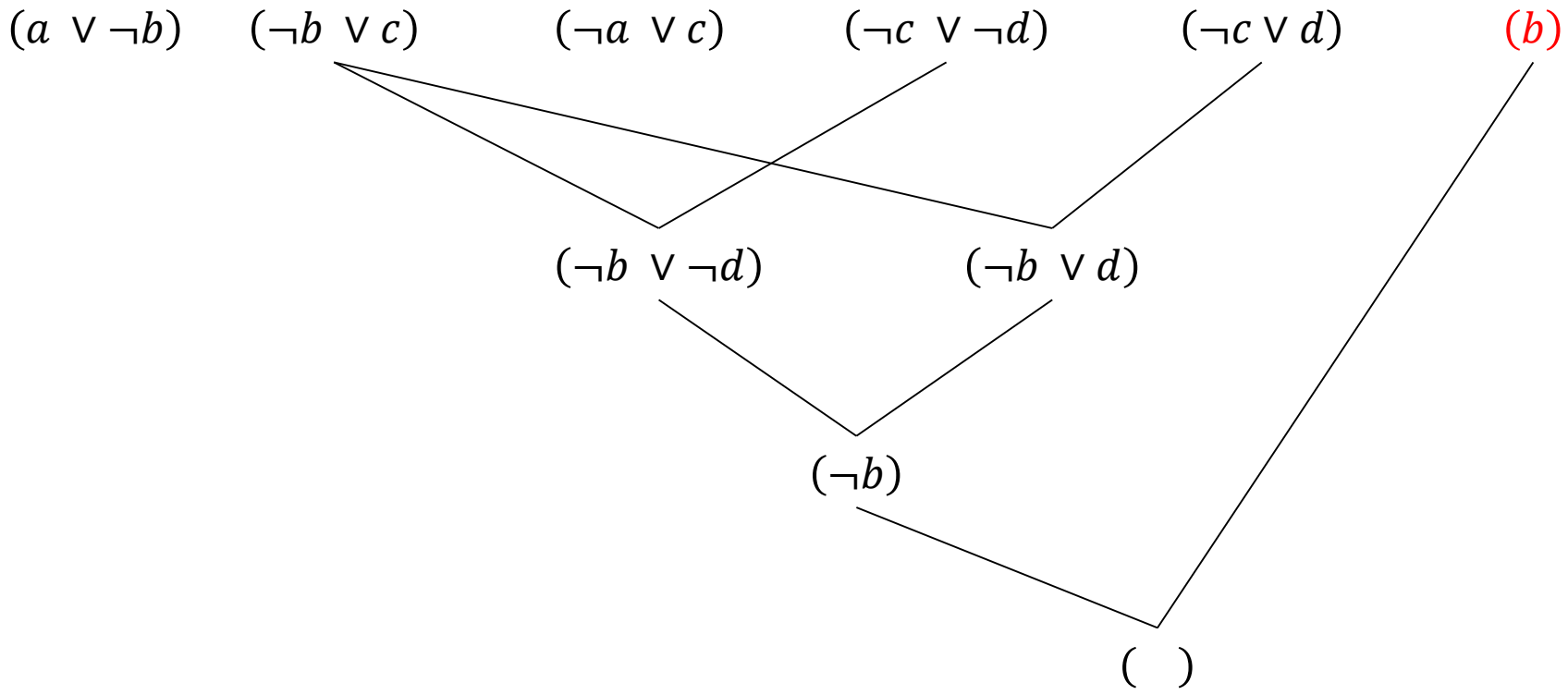
- Folgt hieraus:

$$\neg b$$

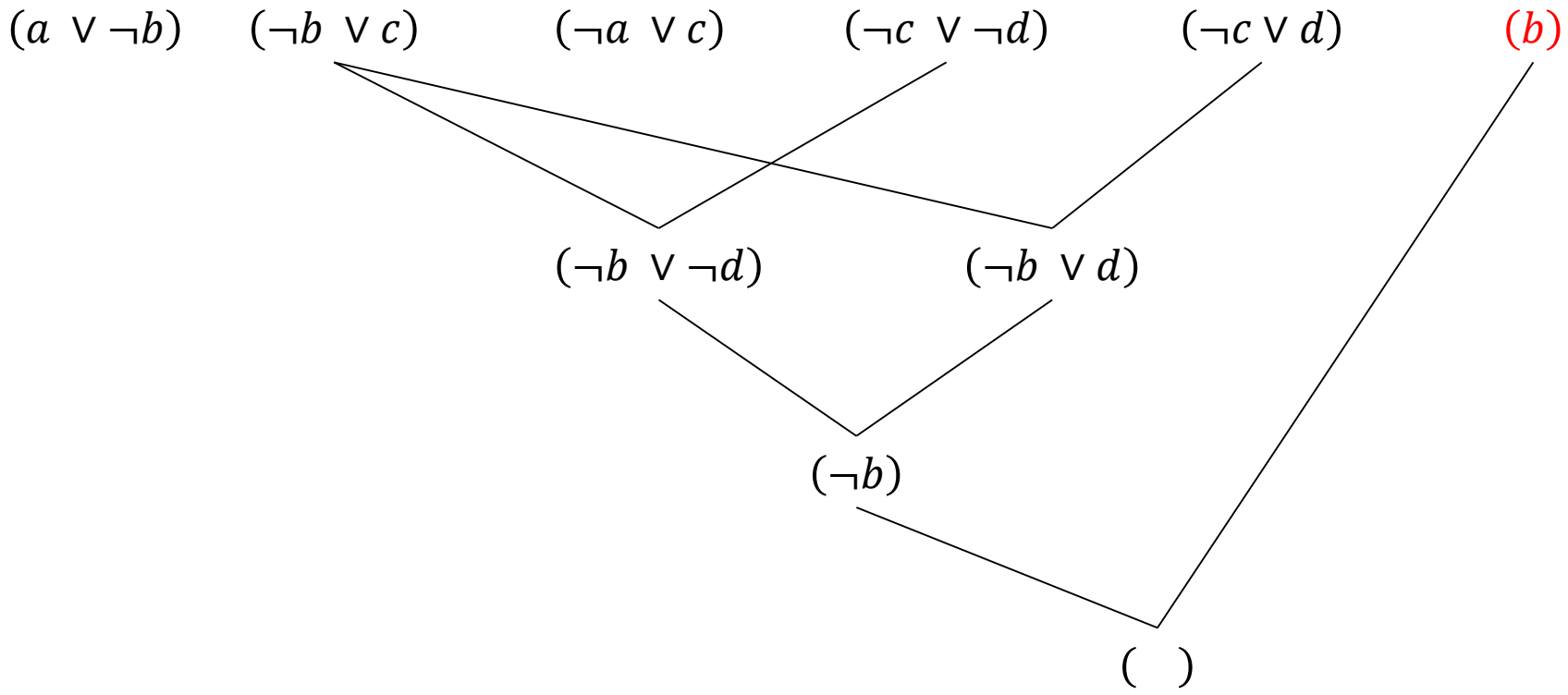
Resolutionsbeweis

$(a \vee \neg b)$ $(\neg b \vee c)$ $(\neg a \vee c)$ $(\neg c \vee \neg d)$ $(\neg c \vee d)$ (b)

Resolutionsbeweis



Resolutionsbeweis



Resolutionsbeweis

- Effiziente Implementierung etwas komplizierter
  - Welche Klauseln versuche ich zu resolvieren?
  - Kann ich bestimmte Kombinationen ausschließen?
  - Wann stoppe ich?

- Man kann Ordnungen über Literale definieren und diese ausnutzen
- Indexstrukturen, um zu entscheiden, welche Kombinationen zu neuen Ableitungen führen

- Behandeln wir nicht in der Vorlesung
  - Notwendig um Reasoner zu bauen, der Resolution verwendet

Überblick

- Wie man ein Problem mit Logik beschreibt
- Wie man, gegeben eine Menge logischer Formeln, Inferenz betreiben kann
  - Formelebene vs. Modellebene
  - Beweisen mit Ableitungsregeln
  - Resolution

  - Wahrheitstabelle
  - Tableauverfahren
  - DPLL (Backtracking + X)
  - GSat (Lokale Suche)
  - WalkSat (Lokale Suche mit Zufallselement)

Schließen auf Modellebene

$B_{1,1}$	$B_{2,1}$	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	$P_{3,1}$	KB	α_1
$false$	$false$	$false$	$false$	$false$	$false$	$false$	$false$	$true$
$false$	$false$	$false$	$false$	$false$	$false$	$true$	$false$	$true$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$false$	$true$	$false$	$false$	$false$	$false$	$false$	$false$	$true$
$false$	$true$	$false$	$false$	$false$	$false$	$true$	$\underline{true}$	$\underline{true}$
$false$	$true$	$false$	$false$	$false$	$true$	$false$	$\underline{true}$	$\underline{true}$
$false$	$true$	$false$	$false$	$false$	$true$	$true$	$\underline{true}$	$\underline{true}$
$false$	$true$	$false$	$false$	$true$	$false$	$false$	$false$	$true$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$false$	$false$

Tabelle hat 2^n Zeilen!

Konstruktion von Modellen

- Tableaux Methode:
  - Top-Down Konstruktion eines Modells auf Grundlage der Formelstruktur
  - Formen in “negation normal form”: später genauer
  - Vorteil: Nicht alle Modelle müssen aufgezählt werden

- Beweisprinzip:
  - Kann kein Modell konstruiert werden ist die Formel nicht erfüllbar
  - Beweis durch Widerspruch

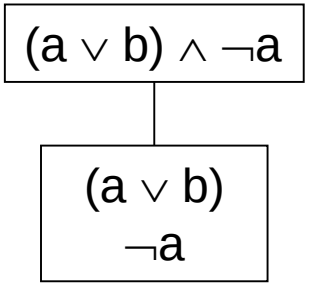
Modellkonstruktion durch Tableaux

- Beispiel:

$$(a \vee b) \wedge \neg a$$

Modellkonstruktion durch Tableaux

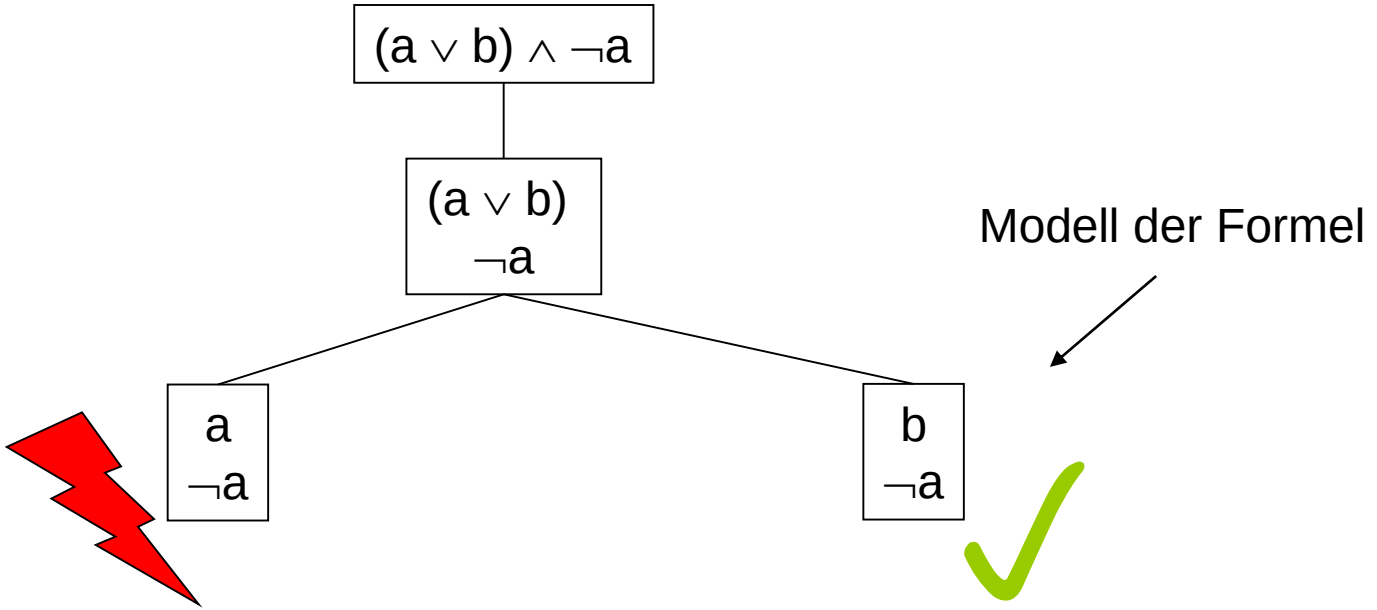
- Beispiel:



Beide Teilformeln der Konjunktion müssen erfüllt sein

Modellkonstruktion durch Tableaux

- Beispiel (erfüllbar):



Eine der Teilformeln der Disjunktion muss erfüllt sein

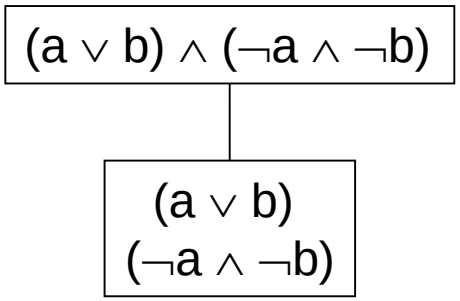
Modellkonstruktion durch Tableaux

- Beispiel:

$$(a \vee b) \wedge (\neg a \wedge \neg b)$$

Modellkonstruktion durch Tableaux

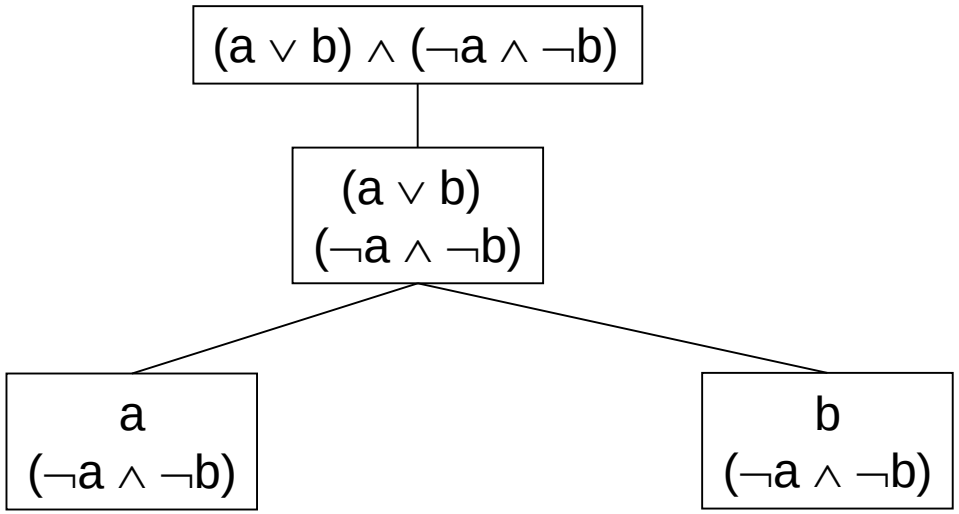
- Beispiel:



Beide Teilformeln der Konjunktion müssen erfüllt sein

Modellkonstruktion durch Tableaux

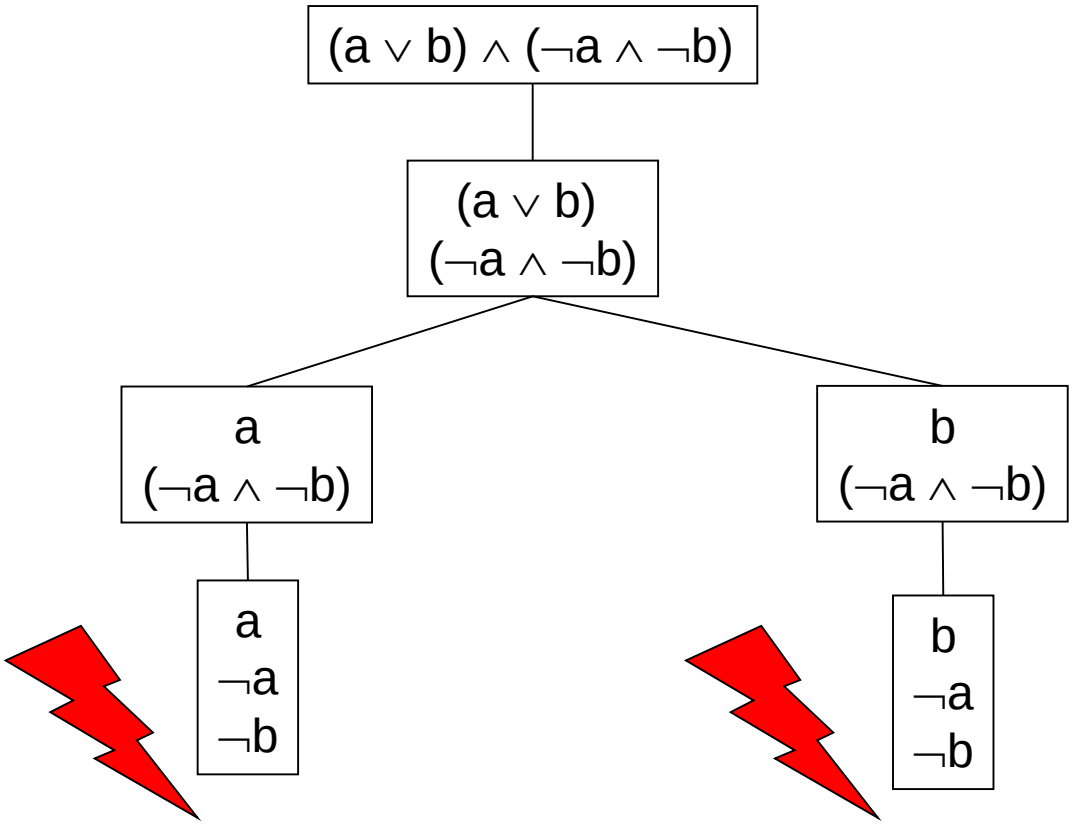
- Beispiel:



Eine der Teilformeln der Disjunktion muss erfüllt sein

Modellkonstruktion durch Tableaux

- Beispiel (unerfüllbar):



Beweisregeln

- Der Tableaux Beweis basiert auf drei einfachen Regeln:
  - Eine Konjunktion ist erfüllbar, wenn alle Teilformeln erfüllbar sind
  - Eine Disjunktion ist erfüllbar, wenn eine der Teilformeln erfüllbar ist
  - Ein Blatt in dem ein Literal und dessen Negation vorkommen ist unerfüllbar
    - Andernfalls ist das Blatt erfüllbar
- Das ist alles!
- Aber: Die Eingabe muss in Negationsnormalform vorliegen, d.h.
  - nur Disjunktion und Konjunktion dürfen verwendet werden
  - Negationen kommen nur in Literalen vor

Nochmal zum Mitschreiben

- In der Regel wendet man das Tableauverfahren an, um herauzufinden, ob eine Formel unerfüllbar ist
  - Zum Beispiel im Rahmen des indirekten Verfahrens
- Sobald man einen Blattknoten ohne Widersprüche findet, kann man das Verfahren beenden
  - Man kann ein Modell aus dem Blattknoten ablesen
  - Die Formel ist erfüllbar
- Ein oder mehrere Blattknoten, die Widersprüche enthalten, erlauben keine Schlußfolgerung zur Unerfüllbarkeit
  - Man muss weiter machen, um festzustellen, ob alle Blattknoten Widersprüche enthalten
  - Mann kann nur schließen, dass die Fornel keine Tautologie ist
- Alle Blattknoten enthalten Widersprüche => Formel unerfüllbar

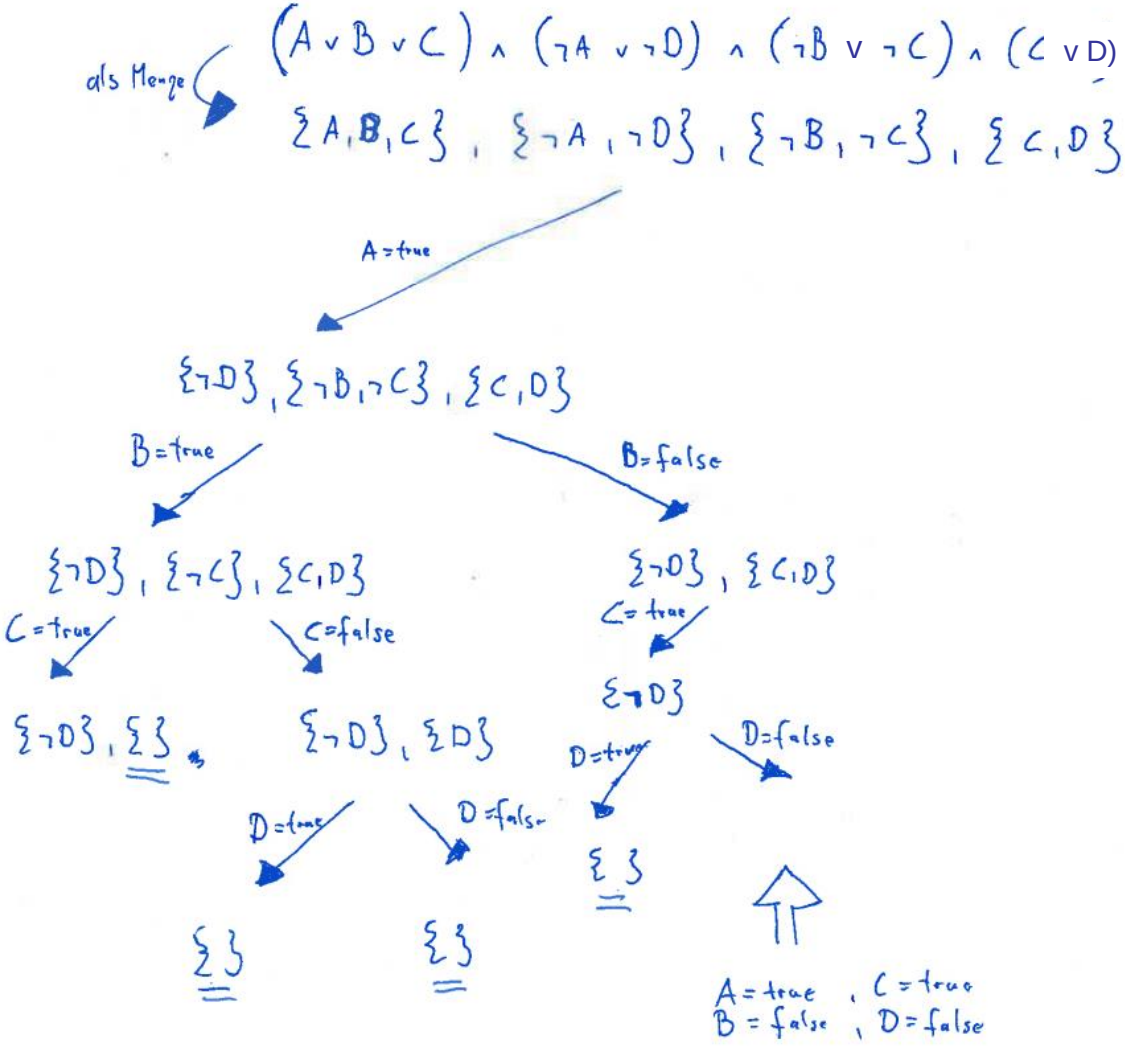
Davis-Putnam Algorithmus

- Backtracking + Heuristiken zum Forward Checking:

- Backtracking:
  - Setze ein Atom α auf true (bzw. false) und vereinfache die resultierende Formel
  - Entferne alle Klauseln in denen α (bzw. $\neg\alpha$) vorkommt, da diese durch die Setzung erfüllt sind
  - Entferne aus allen Klauseln $\neg\alpha$ (bzw. α), da die anderen Literale dafür sorgen müssen, dass die jeweilige Klausel wahr wird

- Leere Klausel erzeugt, dann gehe zurück, ansonsten mach mit der vereinfachten Formel weiter

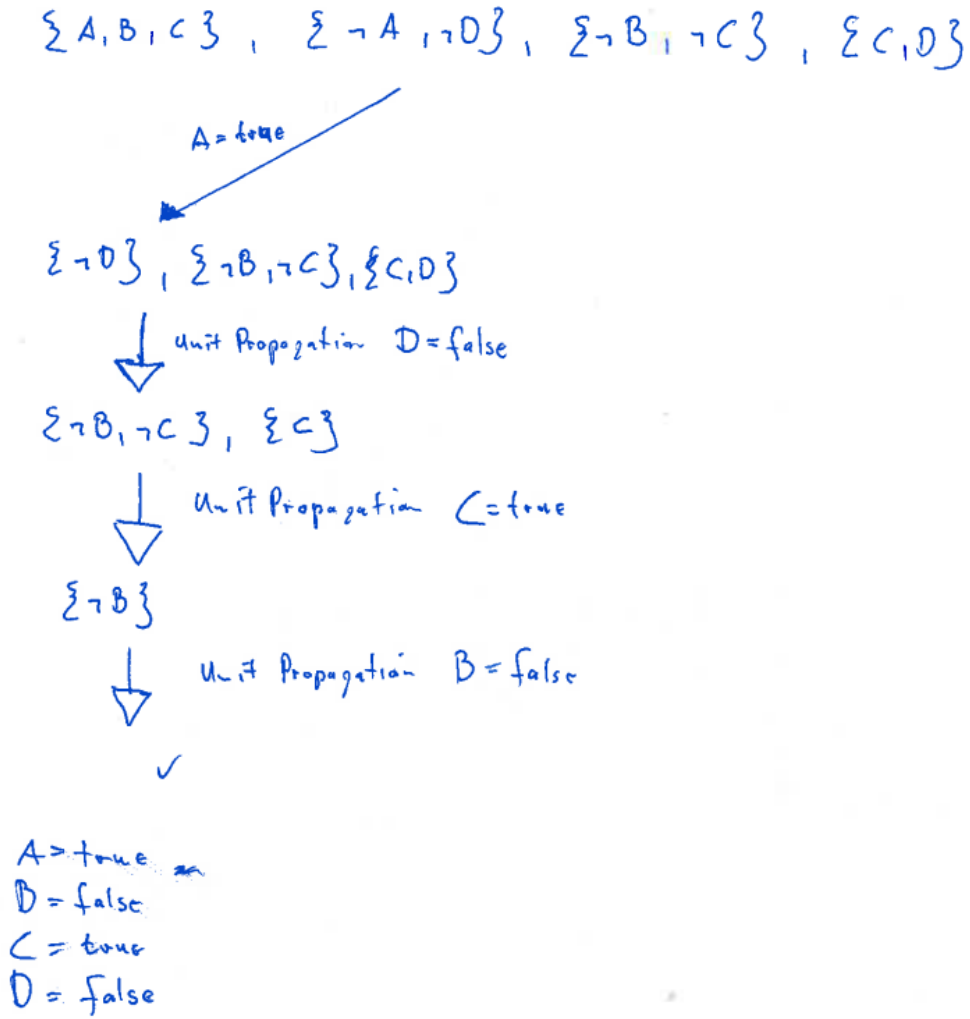
Reines Backtracking



Davis-Putnam Algorithmus

- Wende die folgenden Heuristiken an, wann immer möglich:
  - Tautology Checking
    - Beispiel ... $(A \vee \neg A)$ ...
    - Entfernen der Tautologie
  - Unit Propagation
    - Beispiel: $A \wedge (B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (C \vee \neg A)$
    - Setze A = true und vereinfache die Formel zu $(B \vee \neg C) \wedge C$
  - Pure Literal Deletion
    - Beispiel: $(A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (C \vee A) \wedge (\neg C \vee \neg D)$
    - Setze A = true (bzw. B = false) und vereinfache die Formel

DPLL Beispiel



Schwierige Probleme

- Probleme mit einem bestimmten Verhältnis zwischen Klauseln und Symbolen sind schwer und ab einer gewissen Größe für DPLL nicht mehr lösbar

- Idee: Lokale Suche
  - Nach einem Vergleich von 1993 kommt die vollständige Suche bis max 400 Literale, lokale Suche bis ca. 2000 Literale
  - Aktuelle Solver sind in der Lage Probeme mit bis zu 1 Million Variablen zu lösen

- Wie funktionierte noch mal lokale Suche und wie könnte man das auf Aussagenlogik übertragen ?

* Proceedings of SAT COMPETITION 2018 Solver and Benchmark Descriptions

GSAT

```
for i = 1 to max-tries
    T = random assignment
    loop
        If satiesfied then return T
        best_flip = null
        best_flip_score = satisfied_clauses(T)
        for each variable v
            T‘ = T with v flipped
            if (satisfied_clauses(T‘) > best_flip_score)
                best_flip = v
                best_flip_score = satisfied_clauses(T‘)
        if best_flip != null
            T = T‘ with best_flip flipped
        else
           return from inner loop
    end loop
end for
return unsatisfiable
```

(T = eine Interpretation)

GSAT Beispiel

Es sei T die Belegung bei der alle Variablen auf true gesetzt sind:

$\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge (a \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg f) \wedge (\neg d \vee b \vee g \vee h)$

Welche Variable wird geflippt?
Umfrage: a = A, b = B, c = C, d = D
... ich verrate damit schonmal dass es keine der anderen Variablen ist

GSAT Beispiel

Es sei T die Belegung bei der alle Variablen auf true gesetzt sind:

$\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge (a \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg f) \wedge (\neg d \vee b \vee g \vee h)$

Welche Variable wird geflippt?

-	a	b	c	d	e	f	g	h
4	3	5	3	4	4	4	4	4

Eigenschaften / Probleme

- Ist die Methode korrekt und vollständig, wenn angewendet im Kontext eines indirekten Beweis?
  - Korrektheit:
    - *Wenn KB* $\vdash_i \alpha$ dann *KB* $\models \alpha$
  - Vollständigkeit:
    - Wenn *KB* $\models \alpha$ dann *KB* $\vdash_i \alpha$
- Nicht korrekt, aber vollständig!

- Problem von GSAT: lokale Minima
- Welche Lösungen gibt es dafür
  - Erinnerung: lokale Suche?

WalkSAT

- Randomsierte Variante von GSAT (verwendet ‚random walks‘)
  - With probability p, pick a variable occurring in some unsatisfied clause and change the truth assignment
  - With probability 1-p follow the GSAT strategy

Überblick

- Wie man ein Problem mit Logik beschreibt
- Wie man, gegeben eine Menge logischer Formeln, Inferenz betreiben kann
  - Formelebene vs. Modellebene
  - Beweisen mit Ableitungsregeln
  - Resolution
  - Wahrheitstabelle
  - Tableauverfahren
  - DPLL (Backtracking + X)
  - GSat (Lokale Suche)
  - WalkSat (Lokale Suche mit Zufallselement)

Zusammenfassung

- Alle Modelle aufzuzählen ist nicht effizient, bereits bei kleinen Problemen nicht anwendbar
- Formulierung als KNF für viele Algorithmen Standardinput
- Einfache Verfahren sind Resolution und Wahrheitstafel

- Weiter kommt man mit Backtracking Algorithmus wie DPLL
- Lokale Suchverfahren bei größeren Problemen
  - Findet nicht unbedingt ein Modell, wenn es ein Modell gibt

- Algorithmen werden ständig weiterentwickelt
  - http://www.satcompetition.org/

Ausblick

- Nächste Woche Zeit um Programmierprojekt zu bearbeiten
  - Keine neue Vorlesung nächste Woche
  - Aufgabenstellung ab morgen vormittag verfügbar

- Danach folgende Vorlesungen
  - Planen
  - Maschinelles Lernen
  - *Fragestunde*